

# INTRODUCCIÓN AL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

## Universidad de Ibagué – Prog. Ingeniería Mecánica

### Ing. Alfonso Cubillos

El método de los elementos finitos, es un procedimiento basado en técnicas computacionales, que puede ser usado para analizar estructuras y diferentes sistemas continuos. Es un método numérico versátil, y que es ampliamente aplicado para resolver problemas que cubren casi todo el espectro de análisis ingenieriles. Sus aplicaciones comunes, incluyen el comportamiento de sistemas estáticos, dinámicos y térmicos. Los avances en el hardware, han facilitado y aumentado la eficiencia del software de elementos finitos, para la solución de sistemas complejos de ingeniería sobre computadores personales.

Los resultados obtenidos con el análisis de elementos finitos, son raramente *exactos*. Sin embargo, una solución adecuada puede ser obtenida, si se usa un modelo apropiado de elementos finitos.

Si el objetivo del ingeniero, es el desarrollo de código de elementos finitos, entonces una profunda comprensión de la teoría de elementos finitos es esencial. Si el objetivo, es el uso del código de elementos finitos, entonces para el análisis es necesario tener:

1. Básica comprensión de los conceptos fundamentales del método de los elementos finitos
2. Práctica --- incluyendo el conocimiento de las capacidades y limitaciones --- en el programa computacional que va a ser usado

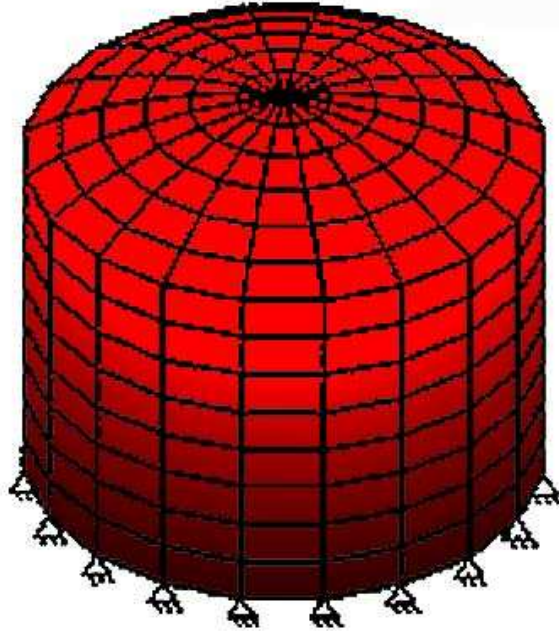
El documento presenta algunos conceptos básicos de la teoría de elementos finitos. Esta discusión ayuda a entender cómo funciona el código de los elementos finitos y como se debe ser usado. Se tratan conceptos, referentes a la aplicación del método en sólidos mecánicos.

### **Descripción General del método de los Elementos Finitos y pasos para el análisis de Elementos Finitos**

Calcular las deformaciones, tensiones y esfuerzos, con métodos clásicos de análisis, se logra a través de la solución manual de sus ecuaciones, y sus condiciones de frontera. El uso de métodos clásicos, es probablemente la mejor forma de analizar estructuras simples; no obstante, su uso es poco aconsejable cuando el sistema es complejo. En estos casos la mejor alternativa, es usualmente una solución obtenida con el método de los elementos finitos.

La primera diferencia entre los métodos clásicos y los elementos finitos son la forma de *ver* la estructura y el consiguiente procedimiento de solución. Los métodos clásicos consideran la estructura como continuo, cuyo comportamiento es gobernado por ecuaciones diferenciales parciales o ordinarias. El método de elementos finitos considera la estructura como el ensamble de un número finito de partículas pequeñas. El comportamiento de las partículas, y de toda la estructura, es obtenida por la formulación de un sistema algebraico de ecuaciones que puede ser solucionado por medio de un computador. Las partículas de

tamaño finito, son llamadas *elementos finitos*. Los puntos donde los elementos finitos son interconectados, son conocidos como *nodos*, y el procedimiento de selección de nodos es llamado *discretización* o *modelización*, ver Figura 1.



*Figura 1 Tanque cilíndrico modelado con elementos finitos*

Normalmente, el análisis de elementos finitos involucra siete pasos. Pasos 1,2,4,5 y 7 requieren decisiones realizadas por el usuario del programa de elementos finitos. El resto de los pasos son realizados automáticamente por el programa de computadora.

### **Pasos para el Análisis de Elementos Finitos:**

1. **Discretización o modelado de la estructura:** La estructura es dividida en una cantidad finita de elementos, con ayuda de un *preprocesador*. Este paso es uno de los más cruciales para obtener una solución exacta del problema, de esta forma, determinar el tamaño o la cantidad de elementos en cierta área o volumen del elemento a analizar representa una ventaja del método, pero a la vez implica que el usuario debe estar muy conciente de esto para no generar cálculos innecesarios o soluciones erróneas.

2. **Definir las propiedades del elemento:** En este paso el usuario debe definir las propiedades del elemento.

3. **Ensamblar las matrices de rigidez de los elementos:** La matriz de rigidez de un elemento, consiste de coeficientes los cuales pueden ser derivados del equilibrio, residuos ponderados o métodos de energía. La matriz de rigidez del elemento se refiere a los desplazamientos nodales al ser aplicadas fuerzas en los nodos ( $K \cdot F = U$ ). El ensamble de las matrices de rigidez, implica la aplicación de equilibrio para toda la estructura.

4. **Aplicación de las cargas:** Fuerzas externas concentradas o fuerzas uniformes y momentos son especificados en este paso.

5. **Definir las condiciones de frontera:** Las condiciones de apoyo deben ser dadas, por ejemplo, si el desplazamiento de ciertos nodos es conocido. Usando los elementos de la frontera se pueden determinar las reacciones en los mismos.

6. **Solucionar el sistema de ecuaciones algebraicas lineales:** La secuencial aplicación de los pasos descritos, conduce a un sistema de ecuaciones algebraicas simultáneas, donde los desplazamientos nodales son desconocidos.

7. **Calcular los esfuerzos:** El usuario puede entonces calcular los esfuerzos, reacciones, deformaciones u otra información relevante. El *post-procesador* ayuda a visualizar la salida en forma gráfica.

## 2. FUNDAMENTOS DE LA MODELIZACIÓN DE ELEMENTOS FINITOS.

### 2.1 Consideraciones del modelado

El objetivo del análisis por medio del método de los elementos finitos, es determinar de forma precisa la respuesta de un sistema modelado con una cantidad finita de elementos y sujeto a unas cargas determinadas. En la generación de un modelo por elementos finitos, siempre se tiene presente que se está desarrollando un modelo el cual es una idealización de un sistema físico real. Con muy pocas excepciones, como el del análisis estático de vigas simples, marcos y sistemas de membranas, el método de elementos finitos no genera una solución 'exacta'. Sin embargo, con un modelo adecuado, se puede obtener una solución precisa. Cuando la formulación analítica de un problema es difícil de desarrollar, FEM (Finite Element Method) provee uno de los más fiables métodos para atacar el problema.

En la creación de un modelo FEM, se debe esforzar por la precisión y la eficiencia computacional. En la mayoría de los casos, el uso de un modelo complejo y muy refinado no es justificable, aunque este probablemente genere mayor exactitud computacional a expensas de un innecesario incremento en el tiempo de procesamiento. El tipo y la complejidad del modelo dependen sobre todo del tipo de resultados requeridos. Como regla general, un modelo de elementos finitos puede empezar con un modelo simple. Los resultados de este modelo sencillo, combinados con la comprensión del comportamiento del sistema, puede ayudar a decidir si es necesario refinar el modelo y en que parte del mismo.

## 2.2 Tipos de Elementos Finitos

Esta sección describe muchas características sobresalientes de los elementos más utilizados; denominados, *truss*, *beam*, *plane stress*, *plane strain*, *axisymmetric*, *membrane*, *plate*, *shell*, *solid* ó *brick*, *tetrahedral*, *hexahedral*, *boundary*, y *gap*. Los programas comerciales de elementos finitos poseen una gran cantidad de elementos en sus librerías. Sin embargo, la mayoría de las estructuras y aplicaciones mecánicas pueden ser solucionadas con los elementos básicos ya mencionados.

Dependiendo la dimensión, los elementos básicos se pueden dividir en tres categorías: elemento de *línea*, *área* y *volumen*. Truss, beam y los elementos de restricción, son de línea. Plane stress, plain strain, axisymmetric, membrane, plate y shell son elementos de área. Solid ó brick, tetrahedral y hexahedral son elementos de volumen. Los criterios para la selección del elemento apropiado para cada aplicación se verán más adelante.

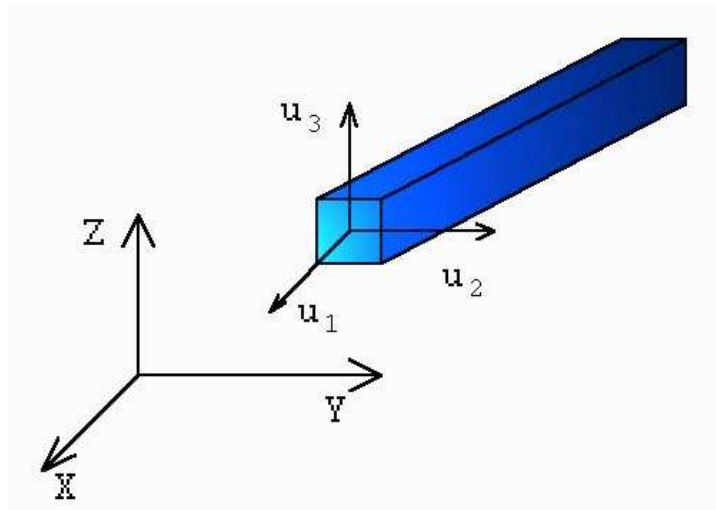
### Elementos ‘Truss’

El elemento truss, es un elemento caracterizado básicamente por que solo puede comportarse como un miembro sometido a dos fuerzas (se sabe por tanto que estas cargas deben estar dirigidas a lo largo del eje longitudinal del elemento).

Una estructura los elementos se pueden modelar como un elementos Truss si cumplen estos tres requerimientos:

- a. Su longitud es mucho mayor que su alto o ancho (entre 8 y 10 veces);
- b. Esta es conectada con el resto de la estructura con pasadores que no transfieren momentos.; y
- c. Las cargas externas solo son aplicadas en el extremo de los elementos, y son paralelas al mismo (Carga Axial).

Los elementos Truss solo pueden ser sometidos a tracción o compresión. De esta forma, la única propiedad de la sección que se debe especificar es el área axial del elemento. La figura 2.2.1 muestra la geometría y las fuerzas nodales en un elemento truss tridimensional. Como se muestra en la figura, un elemento truss tridimensional posee tres grados de libertad por nodo, esto es tres desplazamientos sobre los ejes globales X, Y y Z.

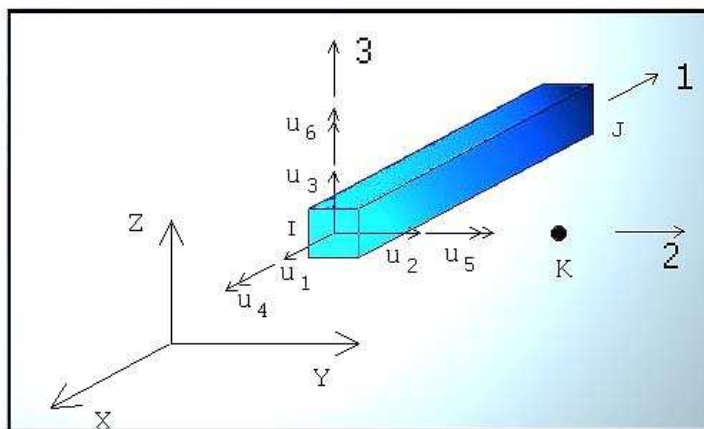


*Figura 2.2.1 Elemento Truss tridimensional*

## Elementos 'Beam'

El elemento Beam, es probablemente el más usado. Además de sus aplicaciones obvias en estructuras, muchos otros sistemas, como uniones mecánicas, sistemas de conductos, tuberías y vigas en puentes pueden ser modeladas con el elemento 'beam'.

Para miembros estructurales para ser modelados con elementos 'Beam', una de sus dimensiones debe ser mucho mayor, por lo menos 10 veces más grande que las otras dos. Contrario al elemento truss, el elemento beam puede estar sometido a cargas transversales



y/o momentos flectores en adición a la tracción y compresión. La geometría y

los desplazamientos/rotación son mostrados en la figura 2.2.2. Note que el elemento beam tridimensional posee seis grados de libertad por nodo, esto es, tres desplazamientos y tres rotaciones sobre los ejes globales X, Y y Z.

*Figura 2.2.2 Elemento beam tridimensional.*

Los perfiles comunes de elementos beam, son la sección I, sección en T, caja, circular y canales. Dentro de las propiedades de la sección, se debe especificar el área axial, la resistencia a la torsión y el momento de inercia.

## Elementos Elásticos bidimensionales

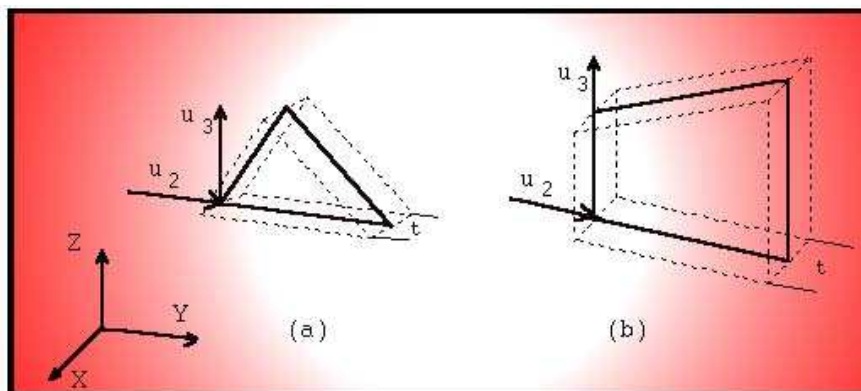
Hay tres tipos de elementos bidimensionales:

1. Plane Stress Elements (Esfuerzo plano)
2. Plane Strain Elements (Deformación plana)
3. Axisymmetric Elements (Elementos Axisimétricos).

### Elementos sometidos a Esfuerzo Plano y Deformación Unitaria Plana

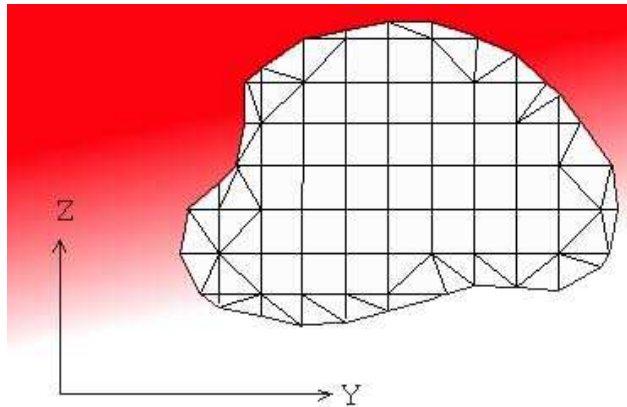
La explicación sobre la diferencia entre los casos de esfuerzo plano y deformación unitaria plana ya fue definida en el primer capítulo del curso.

Para el caso de análisis plano existen principalmente dos tipos de elementos: Triangular y Cuadrilátero. Dependiendo el tipo del tipo de esfuerzo al que esta sometido el elemento, este se debe modelar como esfuerzo plano o deformación unitaria plana.



**Figura 2.2.3** Elemento bidimensional en esfuerzo plano: (a) Triangular; (b) Cuadrilátero.

Como regla, se prefieren los elementos cuadriláteros a los triangulares por razones de isotropía geométrica. Sin embargo, se sugiere el uso de elementos triangulares cuando se presentan irregularidades en la geometría del elemento a modelar, como se muestra en la figura 2.2.4.

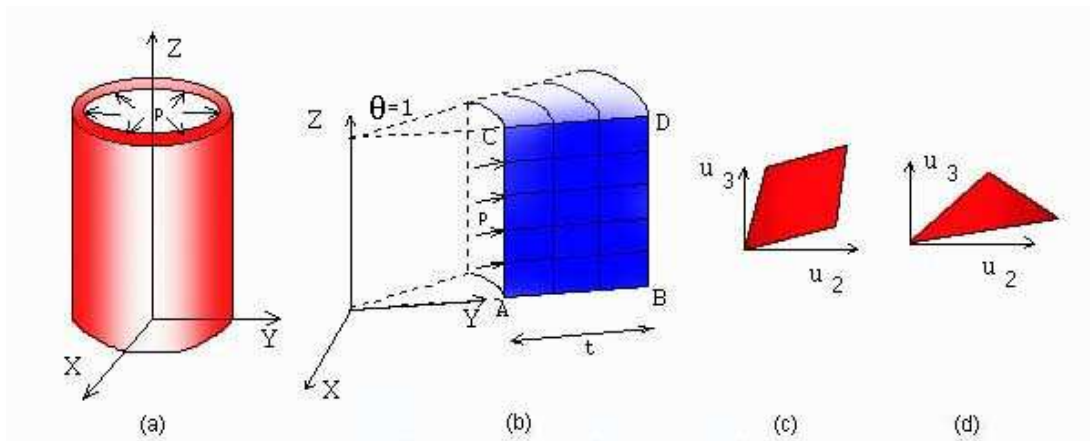


**Figura 2.2.4** Elementos cuadrilateros y triangulares.

## Elementos Axisimetricos

Tanques de acero y concreto, rotores, conchas, toberas y contenedores son algunos ejemplos representativos de estructuras axisimétricas. De forma similar a las estructuras tridimensionales que están bajo condición de esfuerzo plano o deformación plana, las estructuras axisimétricas sometidas a cargas axisimétricas, pueden ser analizadas en un modelo bidimensional. Para analizar una estructura axisimétrica, como un cilindro de pared delgada  $t$ , sujeta a una presión constante  $p$ , el modelo es la intersección del cilindro con el plano  $YZ$  como se muestra en la figura 2.2.5.

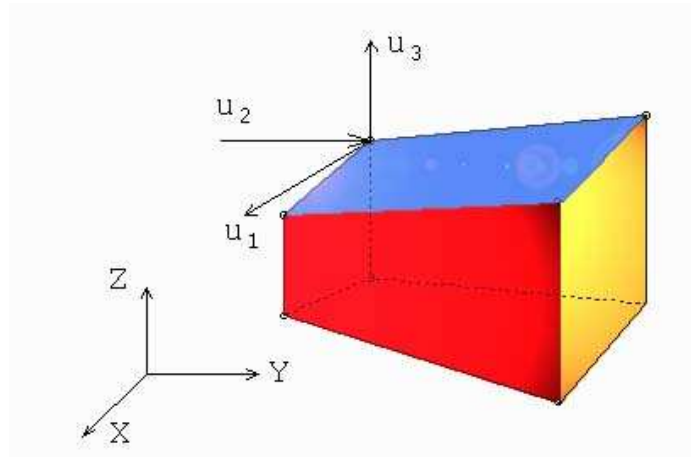
La carga  $p$ , es aplicada al modelo de elementos finitos como se muestra en la figura 2.2.5(b). Cuadrilateros y triángulos axisimétricos poseen dos grados de libertad en cada nodo, figuras. 3.2.5(c) y (d).



**Figura 2.2.5** (a) Cilindro bajo presión interna; (b) Modelo Axisimétrico; (c) Elemento Cuadrilatero; (d) Elemento Triangulart.

## Sólidos elásticos tridimensionales ó elementos 'Brick'

Los elementos sólidos son elementos tridimensionales con tres grados de libertad translacional por nodo, ver figura 2.2.6. Los nodos son usualmente introducidos en la intersección de los tres planos, o el mitad de la intersección de dos planos. Un elemento brick de 8 nodos, con sus respectivos grados de libertad se puede apreciar en la figura 3.2.6.

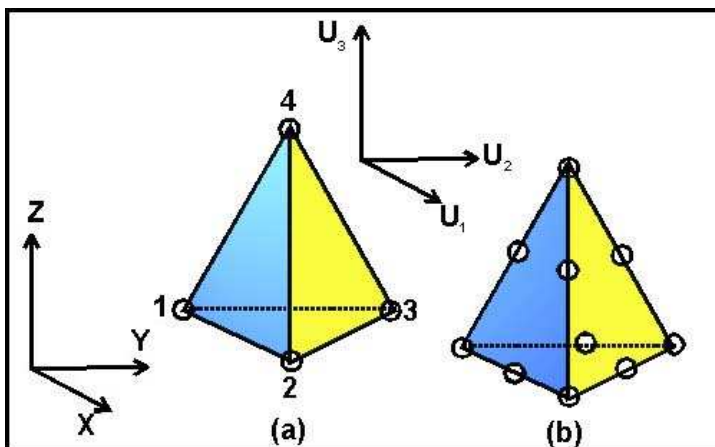


*Figura 2.2.6 Elemento brick y sus grados de libertad por nodo (8 nodos).*

El elemento brick puede proveer información acerca de la variación tridimensional de los esfuerzos y deformaciones del elemento.

## Elementos 'Tetrahedral' and 'Hexahedral'

Así como los elementos brick, los elementos 'tetrahedral' y 'hexahedral' pueden ser usados para modelar estructuras tridimensionales. El tetraedro puede ser visto como un triángulo en tercera dimensión, como se ve en a figura 2.2.7, mientras que el hexaedro puede ser visto como un cuadrilátero extendido en la tercera dimensión. Se puede apreciar entonces que el hexaedro tiene la misma geometría del elemento brick de 8 nodos. La diferencia entre



estos dos, es la formulación y precisión computacional. Por lo general los elementos tetraedro y el hexaedro poseen solo tres grados de libertad por nodo, y la precisión de estos elementos se puede incrementar colocando nodos en la mitad de los lados.

*Figura 2.2.7 (a) Tetraedro de 4 nodos; (b) tetraedro de 10 nodos.*

## 2.3 Selección del tipo de Elementos

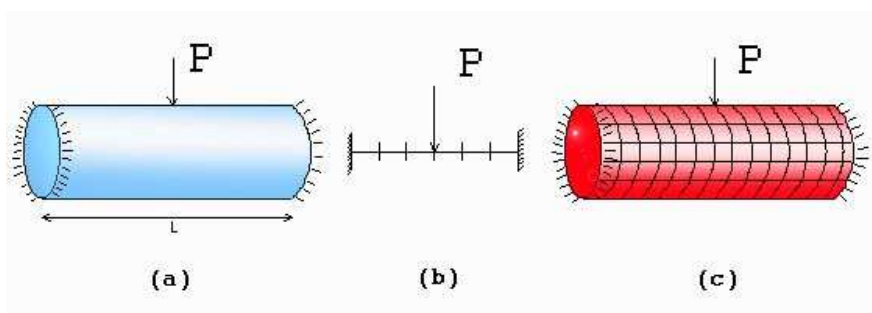
Antes de seleccionar el tipo de elemento para el modelo de una estructura, se debe primero dibujar un bosquejo del sistema físico indicando su geometría, condiciones de frontera, cargas y discontinuidades geométricas o de material. El bosquejo debe además incluir un sistema de coordenadas globales y las dimensiones de la estructura.

Después, se debe examinar si el modelo puede ser reducido, o simplificado. Esfuerzo plano, deformación plana y modelos axisimétricos, permiten la reducción de problemas tridimensionales a bidimensionales. Además la presencia de planos de simetría permite modelar sólo una parte de la estructura. El uso apropiado de la simetría en modelos estáticos ya fue discutido.

El bosquejo de un sistema físico, puede ayudar en la selección del elemento apropiado. Por ejemplo, para modelar cargas transversales o axiales en elementos mecánicos, eléctricos y estructuras civiles, se pueden usar elementos beam o truss. Elementos de esfuerzos planos son apropiados para modelar en el plano de acción, placas y vigas cortas. Elementos de deformación plana son usualmente utilizados para modelar paredes de contención y largos diques. Los elementos axisimétricos son usados para modelar estructuras que son rotacionalmente simétricas sobre uno de los ejes y cargado simétrica o antisimétricamente sobre el mismo eje, como los cilindros sometidos a presión interna.

La selección del tipo de elemento o elementos también depende del tipo de resultados esperados. Por ejemplo el cilindro mostrado en la figura 2.3.1. con los extremos empotrados y sujeto a una carga puntual, puede ser modelado de diferentes formas:

- a. Un modelo de viga puede ser usado si se está interesado en una aproximación de la deflexión del elemento.
- b. Un modelo usando elementos shell/plate puede ser usado si el objetivo es obtener un cálculo de los esfuerzos.



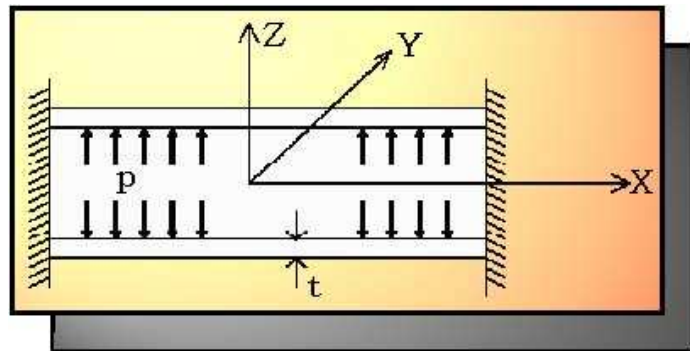
**Figura 2.3.1** (a) Cilindro con extremos empotrados y carga puntual en la mitad; (b) Modelo de viga; (c) Modelo con elementos Plate/shell.

Ciertos problemas pueden ser solucionados con más de un tipo de análisis. Por ejemplo, el cilindro bajo presión interna mostrado en la figura 2.3.2 puede ser analizado de tres formas diferentes:

a. Un problema de deformación plana. En este caso la geometría del modelo consiste en una sección circular obtenida por la intersección del cilindro con el plano YZ. Por el uso de elementos de deformación plana, se pueden obtener resultados que son válidos para una sección del cilindro que esta lejos de los extremos empotrados.

b. Un problema axisimétrico. El modelo usando elementos axisimétricos, es mostrado en la figura 2.2.5. En este modelo todos los nodos sobre los lados AB y CD están restringidos, y la presión  $p$  es aplicada en el lado AC. Las deformaciones y esfuerzos obtenidos del análisis del modelo axisimétrico es válido para toda la estructura. Note que se puede analizar el cilindro con este modelo, por que la carga también es axisimétrica.

c. Una estructura tridimensional. El cilindro es modelado usando elementos plate como se muestra en la figura 2.3.1 (c). Este modelo es el más elaborado pero menos eficiente, puede ser una opción, si las cargas no fueran axisimétricas.



*Figura 2.3.2 Cilindro bajo presión interna.*

## 2.4 Patrones en el modelado

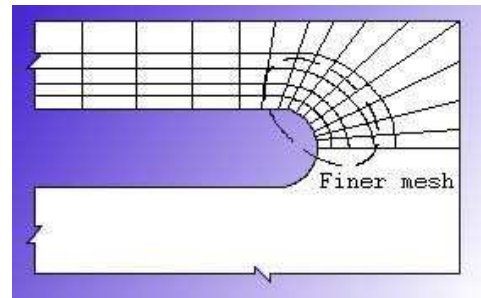
Crear un modelo apropiado es el paso más crucial en el análisis por medio de elementos finitos. El objetivo es desarrollar el patrón de nodos más apropiado, que genere una cantidad suficiente de elementos y obtener resultados sin derrochar interpretación de datos y tiempo de cálculo. El modelo debe ser siempre basado en un conocimiento conceptual del sistema físico y un juicio anticipado de del comportamiento de la estructura. Junto a la comprensión del comportamiento del sistema, el analista debe hacer un esfuerzo para comprender los conceptos pertinentes de la teoría de los elementos finitos. Fallar en el proceso implicaría obtener resultados sin sentido.

La siguiente lista de parámetros, acumulados de la experiencia y seleccionados de diferentes fuentes, puede ser usada para desarrollar modelos adecuados para sistemas estáticos o dinámicos. Debe notar que estas recomendaciones no aplican en todos los casos. Ninguna lista de parámetros puede sustituir el uso de los conocimientos y juicios ingenieriles.

## Recomendaciones Generales:

1. Defina los nodos sobre o cerca a los puntos de aplicación de cargas, discontinuidades geométricas, soportes y todas aquellas regiones que requieran información acerca de los esfuerzos o desplazamientos.

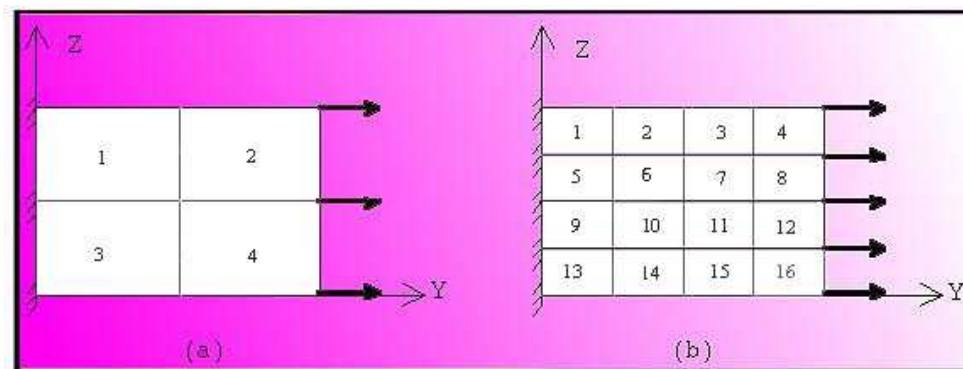
2. Una malla de elementos finitos debe ser uniforme donde sea práctico. Sin embargo, la no uniformidad es requerida para obtener resultados apropiados en cambios bruscos de la geometría y carga. Solo estas partes, donde la geometría, las cargas o los esfuerzos, cambian dramáticamente, se debe refinar la malla, ver figura 2.4.1



*Figura 2.4.1 Placa con concentrador de esfuerzo.*

3. Prefiera el uso de cuadriláteros, elementos sólidos de 6 lados y hexagonos, excepto donde los elementos triangulares y tetraedros son necesarios para acomodar irregularidades geométricas y cargas.

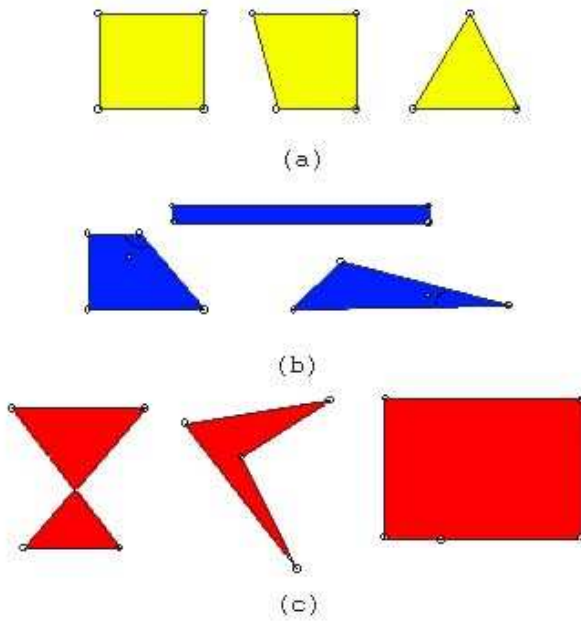
4. Una malla más refinada es requerida para obtener con precisión esfuerzos y desplazamientos. Si es necesario realizar un estudio de convergencia, por ejemplo, empiece con un número relativamente pequeño de elementos y progresivamente genere modelos más refinados. La figura 2.4.2 muestra el procedimiento con dos modelos de esfuerzo plano en una viga corta en cantilever modelada en el plano YZ.



*Figure 3.4.2 Modelo de 4 y 6 elementos de una viga corta en cantilever.*

## Proporción

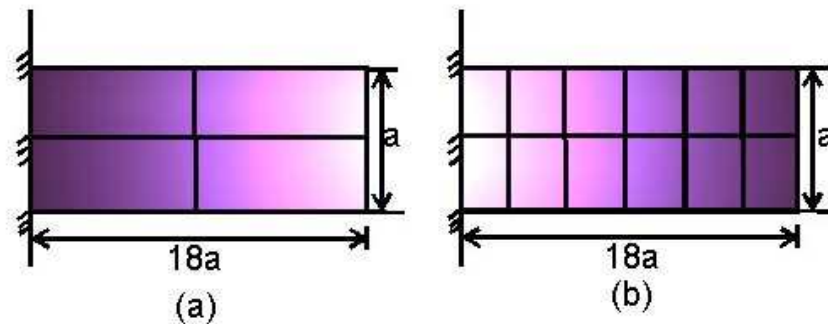
La proporción de los elementos es definida por la relación entre la dimensión más grande y más pequeña del elemento. La figura 2.4.3 muestra la configuración de tres elementos bidimensionales clasificados en 'buenos', 'pobres' e 'ilegales'. Los buenos elementos se caracterizan por que su proporción es cercana a la unidad y los ángulos están cerca a los 90



grados. Los elementos pobres deben ser evitados, pues estos pueden generar resultados inexactos. Los elementos ilegales son inaceptables, y no deben ser usados para modelos de elementos finitos. Cuando elementos ilegales son dibujados inadvertidamente, estos generan modelos de elementos finitos inválidos. Muchos post-procesadores de programas de elementos finitos comerciales, permiten la identificación de éstos errores.

**Figura 2.4.3** Elementos (a) Buenos; (b) Pobres; (c) Ilegales.

5. Si el campo de esfuerzos tiene similar gradiente en todas las direcciones, trate de mantener la proporción en 1. Elementos con alta proporción pueden ser inválidos, ver figura 2.4.4 (a). Sin embargo, los elementos catalogados como pobres, pueden ser utilizados en el análisis de regiones de la estructura donde el gradiente de esfuerzos varía gradualmente sobre una gran dimensión de los elementos. Los elementos ilegales, deber ser siempre despreciados.



**Figure 3.4.4** (a) Proporción muy alta; (b) Proporción en un rango aceptable.

7. Para regiones con pequeñas variaciones de esfuerzos, el factor de proporción puede ser alto, de 40 a 1, y aún así obtener buenos resultados. Sin embargo, como regla general, se recomienda mantener el factor de proporción debajo de 10 para análisis de deformación, y bajo 3 para análisis de esfuerzo, ver figura 2.4.4 (b). Se puede notar que en el análisis de deformación, el énfasis se da en la precisión para calcular los desplazamientos de cada uno de los nodos, mientras que en el análisis de esfuerzos, se esta interesado en la precisión del calculo de ambos, esfuerzos y desplazamientos.

8. Los cambios repentinos en el tamaño de los objetos debe ser evitado. Cuando el uso de elementos de diferentes tamaños es necesario, la relación de dimensión de los objetos adyacentes debe ser menor a dos.

## Elementos Asimétricos

*Asimetría* es definida como la variación del ángulo del vértice del elemento, desde  $60^\circ$  para triángulos, y desde  $90^\circ$  para cuadriláteros. Note que dos de los elementos “pobres” en la figura 3.4.3(b), pueden ser caracterizados como asimétricos.

9. Para elementos triangulares, evite ángulos agudos menores a  $30^\circ$ , y para elementos cuadriláteros, evite ángulos obtusos mayores q  $120^\circ$ , ver Figura 3.4.3(b). Como regla general, el uso de asimetría es aceptable cuando se esta interesado principalmente en los desplazamientos. Sin embargo, si los esfuerzos deben ser calculados con precisión, entonces el modelo debe tener menor asimetría.

## Discontinuidades Geométricas

10. Agujeros, grietas y cambios localizados de la geometría, pueden ser caracterizados como discontinuidades geométricas. El modelamiento de discontinuidades geométricas, depende del interés en la precisión del cálculo de las deformaciones y esfuerzos en la proximidad de la discontinuidad. Si no esta interesado en las deformaciones y esfuerzos en la discontinuidad, se puede usar un *modelo global* de la estructura que posea una malla “gruesa” alrededor de la discontinuidad. Si el objetivo obtener las respuesta cerca de la discontinuidad, un *modelo local* puede ser usado. Contrario al modelo global, el modelo local, usa una malla refinada en las proximidades de la discontinuidad.

Hay dos aproximaciones básicas para modelar agujeros, grietas y entalles:

a. El primero, involucra el uso de un modelo local con una malla refinada alrededor de la discontinuidad. Este método, usualmente requiere una malla detallada que pueda modelar de forma precisa la región alrededor de la discontinuidad.

b. Si el factor concentrador de esfuerzo  $K$  se conoce de la bibliografía o datos experimentales, un modelo preliminar que calcule el esfuerzo alrededor de la discontinuidad, puede ser usado.

Cuando hay un cambio drástico en la geometría, se puede usar una malla más refinada en la región donde los cambios se localizan, ver Figura 3.4.1. También, se pueden combinar diferentes tipos de elementos en la misma modelización, tanto elementos unidimensionales, con bidimensionales, así con tridimensionales.

## Discontinuidad de los Materiales

11. Cambios abruptos en las propiedades del material, pueden ser modelados como se plantea para las “discontinuidades geométricas”, esto es, con la ayuda de modelos globales y locales.

12. Para materiales isotropicos, la relación de Poisson, no debe ser cercana a 0.5. Además, para una relación de Poisson cercana cero, la estructura puede perder al menos toda su rigidez, y como consecuencia los resultados pueden ser erróneos.

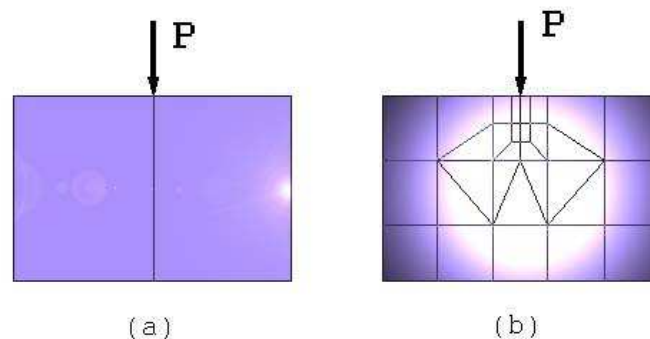
13. Para materiales anisotropicos, el límite teórico de la relación de Poisson y el modulo de Young, a lo largo de la dirección especificada, debe ser verificada con el fin de evitar soluciones indecuadas.

## Cambios Abruptos de la Rigidez

14. Evitar modelos con elementos que tengan diferencias de rigidez mayores a  $10^4$ . La relación de rigidez máximo/mínimo son usualmente provistos en la salida numérica de los software comerciales. Grandes variaciones de rigidez en el modelo, puede conducir a singularidades y matrices auto-condicionadas, que no pueden ser numéricamente resueltas por el procesador. Estas grandes variaciones en la rigidez, pueden ocurrir en modelos que contienen muy pequeños y muy grandes elementos.

## Cambios Abruptos en las Cargas

15. Una malla refinada puede ser usada en las proximidades de un cambio abrupto de la carga, con el fin de capturar las variaciones de esfuerzo cerca de la carga. Este refinamiento de la malla, se puede ver en la Figura 3.4.5.



*Figura 3.4.5 Malla en las proximidades de las cargas puntuales: (a) Gruesa; (b) Refinada.*