

Universidad Tecnológica Nacional
Facultad Regional Buenos Aires

CURSO DE ESPECIALIZACIÓN

Introducción al Método de Elementos Finitos:
Conceptos de Mecánica de los Sólidos

Dr. Ing. Claudio E. Jouglard

Notas del Curso dictado en el 2º cuatrimestre de 2002

Índice

CONCEPTOS DE MECÁNICA DE LOS SÓLIDOS	1
1 Estados planos de tensiones y deformaciones	1
1.1 Deformaciones y desplazamientos	1
1.2 Ecuaciones de equilibrio	4
1.3 Relaciones tensión-deformación	7
2 Trabajo y energía	9
2.1 Trabajo de una fuerza	9
2.2 Energía de deformación	11
2.3 Ejemplo: Energía de deformación para vigas	14
3 Principios variacionales	17
3.1 Nociones de cálculo variacional	17
3.2 Principios variacionales asociados a ecuaciones diferenciales	18
3.3 Principio de mínima energía potencial	20
3.4 Principio de los trabajos virtuales	22
3.5 Ejemplo de aplicación: vigas de ejes recto	23
Referencias	25

Conceptos de Mecánica de los Sólidos

Se mostrarán en este apunte algunos conceptos básicos de mecánica de los sólidos. En primer lugar describiremos estados planos de tensiones y deformaciones, luego se detallarán los conceptos de trabajo y energía de deformación y finalmente se darán algunas nociones de cálculo variacional y se describirán los principios variacionales más usuales para la resolución de problemas estructurales.

1 ESTADOS PLANOS DE TENSIONES Y DEFORMACIONES

Los conceptos fundamentales, definiciones y ecuaciones usadas en el análisis de tensiones y deformaciones se tratan específicamente en la disciplina llamada *teoría de la elasticidad*. Estos fundamentos son usados para resolver problemas de tensiones por métodos clásicos ó analíticos y también por el método de elementos finitos. Por simplicidad sólo abordaremos problemas en dos dimensiones y en coordenadas cartesianas. Un tratamiento más detallado y generalizado puede encontrarse en los libros clásicos de teoría de la elasticidad ^[1].

1.1 Deformaciones y desplazamientos.

Las relaciones entre deformaciones y desplazamientos son un ingrediente clave en la formulación de elementos finitos para problemas de análisis de tensiones. Analizaremos en el caso particular, muy usual en estructuras civiles, de las deformaciones de cuerpos sometidos a desplazamientos muy pequeños.

Consideremos una barra de longitud l_0 que es sometida a un estiramiento uniforme Δl en su extremo hasta alcanzar una longitud l_f .

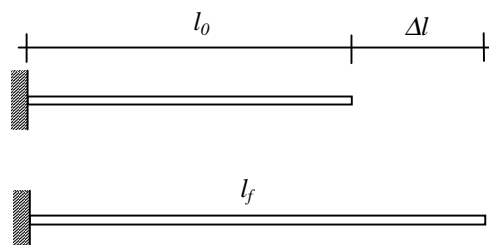


Figura 1. Deformación longitudinal de una barra.

La deformación longitudinal ϵ de la barra es definida como el cociente entre el estiramiento y la longitud original, esto es

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{l_f - l_0}{l_0} \quad (1)$$

En general una barra puede estar sometida a estiramientos variables a lo largo de su longitud. Luego es conveniente definir la deformación a nivel infinitesimal considerando un segmento diferencial de barra dx como se muestra en la figura 2. Si llamamos $u(x)$ al desplazamiento en la dirección longitudinal de un punto en la posición x , entonces un punto situado a una distancia dx sufrirá un desplazamiento $u+du$.

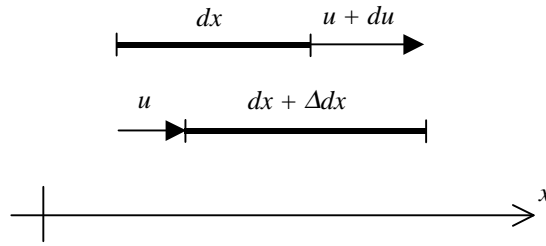


Figura 2. Deformación longitudinal de un segmento diferencial de barra.

Debido a los desplazamientos de sus extremos el segmento de barra dx se estira una cantidad $\Delta(dx)$. Por la definición de deformación longitudinal, ε es el cociente de la variación de longitud respecto a la longitud original, por lo tanto:

$$\varepsilon = \frac{\Delta dx}{dx} \quad (2)$$

Analizando la figura 2 tenemos

$$u + dx + \Delta dx = dx + u + du \quad (3)$$

resultando

$$\Delta dx = du \quad (4)$$

Substituyendo en la ecuación (2) resulta

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} \quad (5)$$

Luego, esta expresión nos dice que la deformación longitudinal de un segmento de barra dx debe ser igual a la derivada del desplazamiento en la dirección longitudinal respecto de x .

Este concepto se puede extender a dos dimensiones si consideramos un elemento de área diferencial de lados dx , dy sometido a un estiramiento uniforme u en la dirección x (Figura 3). En este caso la deformación longitudinal en la dirección x se define como

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx} \quad (6)$$

Analizando la figura 3 tenemos un resultado similar al anterior, esto es

$$\Delta dx = du \quad (7)$$

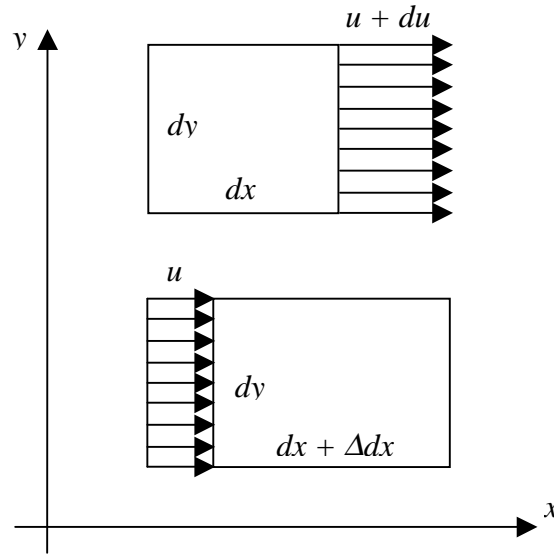


Figura 3. Deformación longitudinal de un elemento diferencial de área.

Pero ahora el desplazamiento u en la dirección x será en general una función de x, y , pero dado que hemos supuesto que el desplazamiento es uniforme para el elemento de área diferencial, esto es, no varía en la dirección y , entonces se debe cumplir que

$$\Delta dx = du = \frac{\partial u}{\partial x} dx \quad (8)$$

Luego reemplazando en la ecuación (6) resulta

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (9)$$

Un análisis similar en la dirección y nos da:

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (10)$$

donde v es el desplazamiento en la dirección y .

Además de las deformaciones longitudinales en un elemento de área tenemos también deformaciones angulares ó por corte. La deformación por corte es definida como la variación angular de un ángulo inicialmente recto. Consideremos un ángulo recto formado por la intersección de dos segmentos de longitud diferencial paralelos a los ejes coordenados que se deforma como se muestra en la figura 4. Si llamamos β_1 al ángulo formado por el segmento dy con el eje y , y si llamamos β_2 al ángulo formado por el segmento dx con el eje x , entonces el ángulo de distorsión por corte viene dado por la suma $\beta_1 + \beta_2$.

Como los desplazamientos son asumidos muy pequeños podemos aproximar al ángulo con su seno. Por lo tanto la deformación por corte es:

$$\gamma_{xy} = \beta_1 + \beta_2 \approx \text{sen } \beta_1 + \text{sen } \beta_2 = \frac{(u + du) - u}{dy} + \frac{(v + dv) - v}{dx} \quad (11)$$

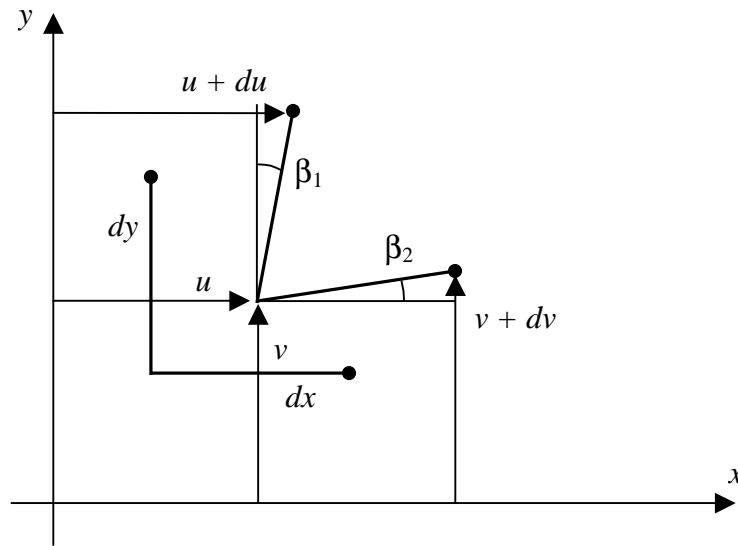


Figura 4. Distorsión de un ángulo recto.

y notando que a lo largo de la dirección y tenemos

$$u + du \approx u + \frac{\partial u}{\partial y} dy \quad (12)$$

y a lo largo de la dirección x tenemos

$$v + dv \approx v + \frac{\partial v}{\partial x} dx \quad (13)$$

por lo tanto resulta

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (14)$$

En resumen, las relaciones deformación – desplazamiento en dos dimensiones y en coordenadas cartesianas son:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \quad (15)$$

Como fue citado anteriormente, formas especiales de estas relaciones, como por ejemplo para sólidos de revolución ó su extensión a tres dimensiones, pueden encontrarse en los libros tradicionales de teoría de la elasticidad.

1.2 Ecuaciones de equilibrio.

Existen muchos problemas de ingeniería donde podemos considerar a un cuerpo tridimensional como si fuese un cuerpo plano de espesor h , y mediante hipótesis de

comportamiento apropiadas podemos asumir que las cantidades de importancia varían en este plano permaneciendo constantes a lo largo del espesor.

Así, por ejemplo, consideremos un cuerpo plano deformable en equilibrio sometido a fuerzas de superficie t en su contorno y posiblemente también a fuerzas de volumen b en su interior. Debido a estas fuerzas el cuerpo se deforma con desplazamientos u, v en las direcciones x, y respectivamente. En parte de su contorno estos desplazamientos pueden estar restringidos (Fig. 5).

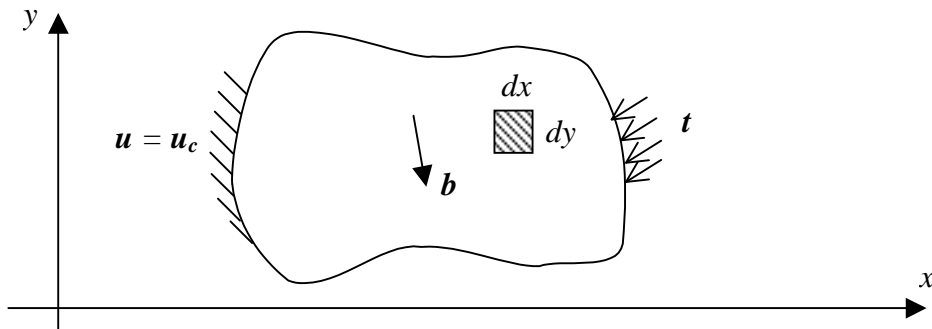


Figura 5. Cuerpo plano cargado en equilibrio.

Debido a las deformaciones en el interior del cuerpo se generan *tensiones*, esto es fuerzas por unidad de área, que deben estar en equilibrio con las fuerzas externas actuantes. Si tomamos un elemento de área diferencial de espesor constante h sobre las caras de este elemento actúan tensiones $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$, como se muestra en la figura 6.

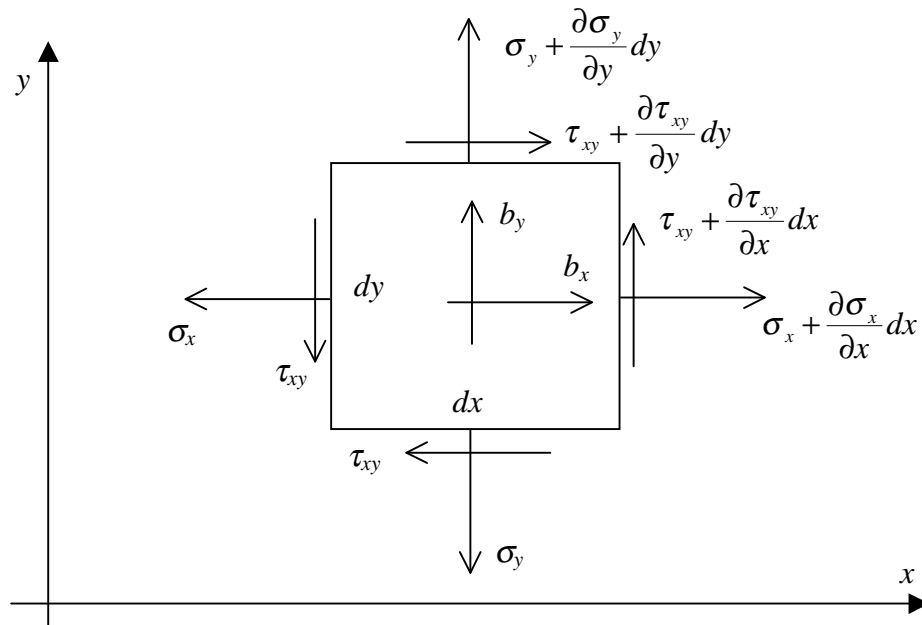


Figura 6. Tensiones y fuerzas de volumen en un elemento de área diferencial.

Las fuerzas de volumen b_x, b_y tienen dimensiones de fuerzas por unidad de volumen y pueden provenir de la acción de la gravedad, aceleración, un campo magnético ó cualquier

otra acción. Se las considera positiva si actúan en las direcciones positivas de los ejes coordenados. Sobre el elemento diferencial producen las fuerzas diferenciales $b_x dV$ y $b_y dV$ siendo dV el diferencial de volumen $dV = h dx dy$.

Luego el equilibrio de fuerzas en la dirección x requiere que:

$$\begin{aligned} -\sigma_x h dy - \tau_{xy} h dx + \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) h dy \\ + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy \right) h dx + b_x h dx dy = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

Análogamente tenemos una ecuación similar en la dirección y . Luego de simplificar estas ecuaciones tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + b_x = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + b_y = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

Estas son las ecuaciones diferenciales de equilibrio que deben cumplirse para cualquier punto del cuerpo. Además en el contorno donde haya fuerzas aplicadas deben equilibrarse con las tensiones.

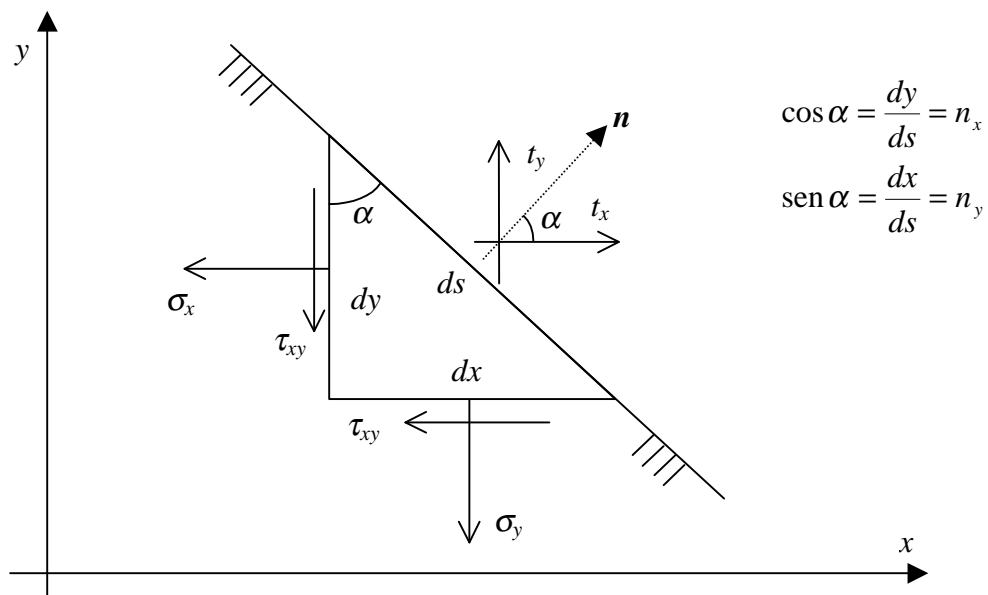


Figura 7. Tensiones y fuerzas de superficie en el contorno.

Las fuerzas de superficie t_x , t_y tienen dimensiones de fuerzas por unidad de superficie y provienen de acciones sobre el contorno del cuerpo. Se las considera positiva si actúan en las direcciones positivas de los ejes coordenados. Sobre el elemento diferencial producen las fuerzas diferenciales $t_x h ds$ y $t_y h ds$ siendo ds el diferencial de un segmento de línea sobre el contorno cuya normal es \mathbf{n} .

Luego el equilibrio de fuerzas en la dirección x requiere que:

$$t_x h ds = \sigma_x h dy + \tau_{xy} h dx \quad (18)$$

dividiendo ambos lados por ds tenemos:

$$t_x = \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y \quad (19)$$

donde n_x, n_y son las componentes según los ejes x, y del vector unitario normal.

De manera análoga en la dirección y tenemos:

$$t_y = \sigma_y n_y + \tau_{xy} n_x \quad (20)$$

Las ecuaciones de equilibrio (17) no son suficientes para determinar el estado de tensiones de un cuerpo deformable sometido a fuerzas, ya que tenemos dos ecuaciones diferenciales de equilibrio para tres variables incógnitas $\sigma_x, \sigma_y,$ y τ_{xy} . Luego es necesaria una ecuación adicional que es provista por la condición de *compatibilidad*. Esta ecuación se expresa en términos de deformaciones como

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (21)$$

El cumplimiento de esta ecuación asegura que los desplazamientos que generaron estas deformaciones son continuos y univaluados, esto es, poseen un valor único para cada punto. Luego es necesario relacionar las deformaciones con las tensiones para poder utilizar esta ecuación.

1.3 Relaciones tensión - deformación.

Casi todos materiales usados en ingeniería poseen hasta un cierto grado la propiedad de *elasticidad*. Esto implica que si las fuerzas externas que provocaron la deformación de un cuerpo cesan de actuar entonces las deformaciones desaparecen y el cuerpo recobra su configuración original. Un caso particular de sólidos elásticos son los que satisfacen relaciones lineales entre tensiones y deformaciones. Si además estos sólidos poseen las mismas propiedades en todas las direcciones, el material es llamado *isotrópico*.

Podemos distinguir dos tipos particulares de problemas de estados planos: estados planos de tensiones y estados planos de deformaciones. En los problemas de estados planos de tensiones se desprecian todas las tensiones perpendiculares al plano. Para este caso, aplicable a sólidos planos de espesor muy pequeño, las relaciones tensión-deformación para un material elástico lineal isotrópico son:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (22)$$

donde E es el módulo de elasticidad y ν es el módulo de Poisson.

Usando notación matricial esta relación se puede expresar como

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \boldsymbol{\epsilon} \quad (23)$$

Donde $\boldsymbol{\sigma}$ y $\boldsymbol{\epsilon}$ son los vectores de tensiones y deformaciones, respectivamente

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (24)$$

y \mathbf{D} es la llamada *matriz constitutiva* que para estados planos de tensiones vale

$$\mathbf{D} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \quad (25)$$

En los problemas de estados planos de deformaciones se desprecian todas las deformaciones perpendiculares al plano. Para este caso, aplicable, por ejemplo, a presas de gran longitud, las relaciones tensión-deformación para un material elástico lineal isotrópico son:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (26)$$

Nótese que si definimos las constantes $E^* = E/(1-\nu^2)$ y $\nu^* = \nu/(1-\nu)$ y las reemplazamos en las relaciones (25) para estados planos de tensiones se obtienen las relaciones (26) para estados planos de deformación. Esto es importante desde el punto de vista de implementación computacional, ya que un programa diseñado para resolver estados planos de tensiones puede ser usado sin modificaciones para resolver problemas de estados planos de deformaciones simplemente utilizando las constantes elásticas apropiadas a cada caso.

Luego es posible invertir las relaciones de la ecuación (25) para obtener las deformaciones σ_x , σ_y , y τ_{xy} en función de las deformaciones ε_x , ε_y , y γ_{xy} como

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (27)$$

Reemplazando estas relaciones en la ecuación de compatibilidad (15) resulta

$$\boxed{\left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} \right) = 2(1+\nu) \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y}} \quad (28)$$

Luego, para obtener el estado de tensiones de un cuerpo plano sometido a fuerzas externas de volumen \mathbf{b} y de superficie \mathbf{t} debemos resolver simultáneamente el sistema de tres ecuaciones diferenciales formado por las ecuaciones diferenciales de equilibrio (17) y la ecuación de compatibilidad en tensiones (28). En general, la solución directa de estas ecuaciones diferenciales solo es posible en un número muy reducido de casos de geometría bastante simple. Luego es necesario utilizar técnicas alternativas de solución para casos más complicados. Entre las alternativas posibles tenemos las técnicas basadas en principios variacionales y métodos de residuos ponderados. La importancia de estas técnicas radica no

solo en el hecho de poder conseguir la solución exacta en una forma alternativa, sino que además, sirven para obtener soluciones aproximadas, formando el fundamento de una gran parte de los métodos numéricos actualmente utilizados, como el método de elementos finitos.

2 TRABAJO Y ENERGÍA

Los conceptos de trabajo y energía son importantes para el planteo de los llamados principios energéticos de la mecánica sobre los que se basan la mayoría de los métodos numéricos empleados para obtener soluciones aproximadas de problemas estructurales.

2.1 Trabajo de una fuerza.

Considere una fuerza \mathbf{F} actuando sobre una partícula, con vector posición \mathbf{r} , que se traslada sobre una trayectoria curva entre dos puntos a , b .

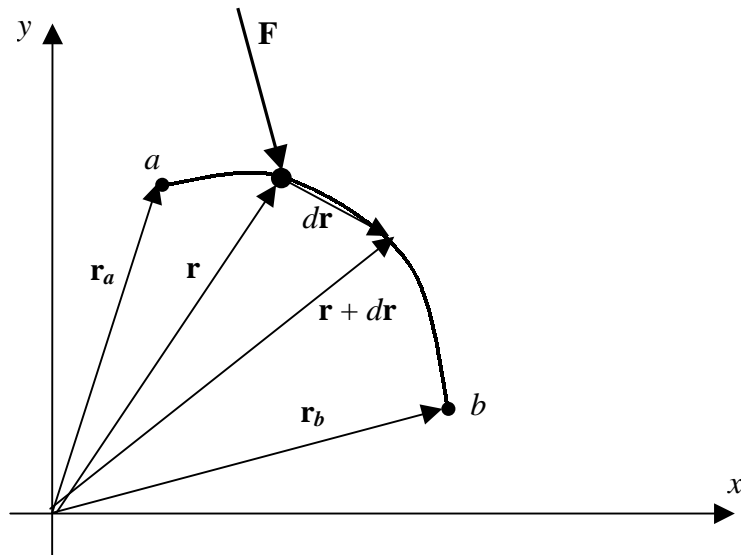


Figura 8. Desplazamiento de la fuerza \mathbf{F} sobre una trayectoria curva.

Para un desplazamiento diferencial $d\mathbf{r}$ de la partícula la fuerza \mathbf{F} realiza un trabajo incremental ΔW que se define como:

$$\Delta W = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F_x dx + F_y dy \quad (29)$$

Luego el trabajo total realizado por la fuerza \mathbf{F} sobre la partícula entre a y b es:

$$W = \int_a^b \Delta W = \int_{r_a}^{r_b} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (30)$$

En una gran cantidad de casos en la naturaleza las componentes F_x , F_y del vector \mathbf{F} pueden derivarse de una función escalar V , esto es:

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad (31)$$

$$F_y = -\frac{\partial V}{\partial y}$$

Y el vector de fuerzas \mathbf{F} pueden expresarse como menos el gradiente de la función V , esto es

$$\mathbf{F} = -\nabla V \quad (32)$$

La función V es conocida como la *energía potencial* asociada al campo de fuerzas \mathbf{F} y para este tipo particular de fuerzas el incremento infinitesimal de trabajo ΔW se puede expresar como una diferencial exacta:

$$\Delta W = -\left(\frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy\right) = -dV \quad (33)$$

Luego el trabajo total realizado por la fuerza \mathbf{F} es:

$$W = \int_a^b \Delta W = \int_a^b -\left(\frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy\right) = \int_a^b -dV = V_a - V_b \quad (34)$$

Nótese que trabajo total solo depende de los valores de la función potencial en a y en b , por lo tanto es independiente de la trayectoria empleada para unir estos puntos. Las fuerzas cuyas componentes se pueden derivar de una función potencial son llamadas *conservativas*.

Consideremos ahora una fuerza \mathbf{F} de dirección constante y sea u el desplazamiento en la dirección de la fuerza para el punto donde está aplicada la fuerza. Si el módulo de \mathbf{F} es una función $F(u)$ creciente con el desplazamiento u , como se muestra en la figura 9

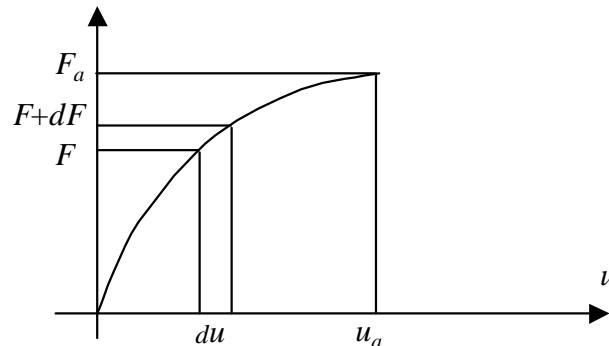


Figura 9. Fuerza de magnitud creciente con los desplazamientos.

Luego el trabajo de la fuerza \mathbf{F} al recorrer una distancia u_a en su dirección es:

$$W = \int_0^{u_a} \mathbf{F} d\mathbf{r} = \int_0^{u_a} F du \quad (35)$$

Esto es, el trabajo es igual al área encerrada bajo la curva.

Si la relación entre F y u es lineal, como en el caso de una fuerza elástica (figura 10), esto es:

$$F_e = k u \quad (36)$$

Donde k es una constante. Luego el trabajo realizado por esta fuerza a recorrer una distancia u es:

$$W = \int_0^u F_e du = \int_0^u (k u) du = \frac{k u^2}{2} = (k u) \frac{u}{2} \quad (37)$$

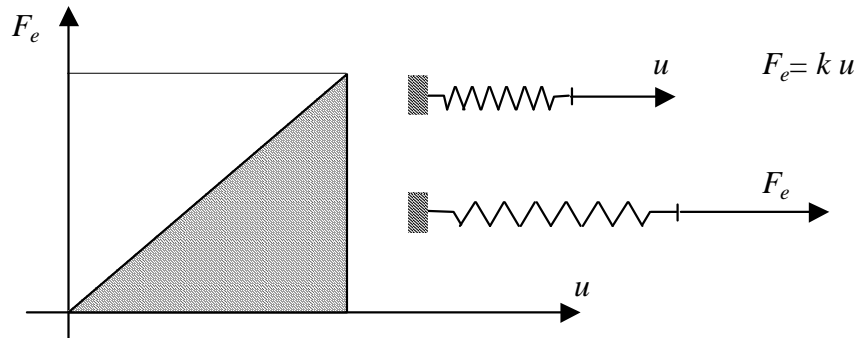


Figura 10. Trabajo de una fuerza elástica.

O sea el trabajo es el área encerrada por el triángulo.

$$W = \int_0^u F_e du = (k u) \frac{u}{2} = \frac{1}{2} F_e u \tag{38}$$

Notemos que los trabajos de fuerzas elásticas son conservativos.

2.2 Energía de deformación.

Cuando un cuerpo elástico es sometido a deformaciones sus fuerzas internas realizan trabajo, que se designa como *energía de deformación*.

Consideremos el incremento diferencial de trabajo de las tensiones σ_x en un elemento diferencial de volumen $dx dy dz$, cuando los desplazamientos u se incrementan en una cantidad infinitesimal Δu

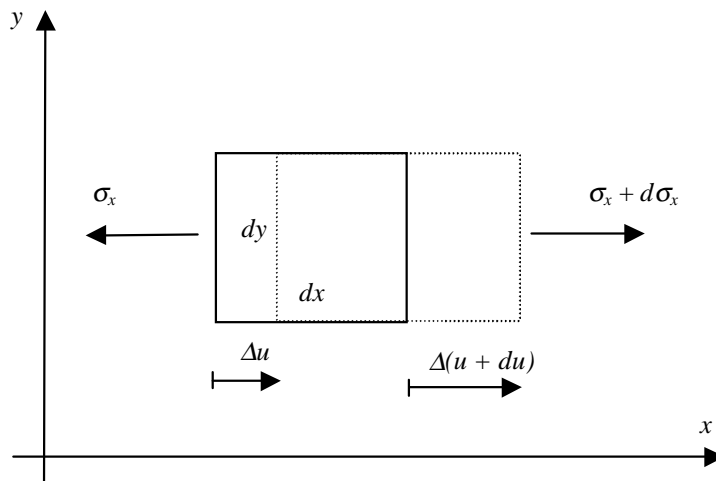


Figura 11. Trabajo incremental de las tensiones.

El trabajo realizado por las fuerzas resultantes de las tensiones σ_x en cada cara $dy dz$ durante un incremento diferencial de los desplazamientos u es.

$$\Delta W = -(\sigma_x dy dz) \Delta u + ((\sigma_x + d\sigma_x) dy dz) (\Delta u + \Delta du) \tag{39}$$

Despreciando infinitésimos de orden superior el incremento de trabajo es

$$\Delta W = (\sigma_x dy dz) \Delta du \quad (40)$$

Y notando que en la dirección x

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx = \varepsilon_x dx \quad (41)$$

Luego el incremento diferencial Δdu para el elemento de longitud dx vale:

$$\Delta du = d\varepsilon_x dx \quad (42)$$

y por lo tanto el incremento infinitesimal de trabajo es

$$\Delta W = \sigma_x d\varepsilon_x dx dy dz \quad (43)$$

Si llamamos U_0 a la energía de deformación por unidad de volumen, un incremento diferencial dU_0 de esta energía debe ser igual al incremento del trabajo interno por unidad de volumen, esto es

$$dU_0 = \sigma_x d\varepsilon_x \quad (44)$$

Luego la energía de deformación específica U_0 será

$$U_0 = \int_0^{\varepsilon_x} \sigma_x d\varepsilon_x \quad (45)$$

Y finalmente la energía de deformación total será la integral sobre todo el volumen de la energía de deformación específica U_0

$$U = \int_{\Omega} U_0 d\Omega = \int_{\Omega} \left(\int_0^{\varepsilon_x} \sigma_x d\varepsilon_x \right) d\Omega \quad (46)$$

En general las tensiones pueden ser funciones no lineales de las deformaciones

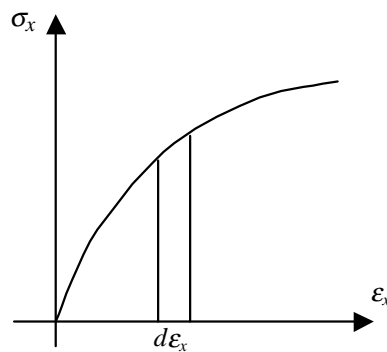


Figura 12. Relación no lineal tensión deformación.

Para el caso particular de un material lineal (esto es, que cumple la ley de Hooke) resulta

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_x \varepsilon_x d\Omega \quad (47)$$

Para las tensiones de corte el incremento de trabajo provocado por las fuerzas resultantes de las tensiones τ_{xy} en cada cara $dx dz$ y por las fuerzas resultantes de las tensiones τ_{yx} en cada cara $dy dz$ durante incrementos diferenciales de los ángulos $\Delta\beta_1$ y $\Delta\beta_2$ es (figura 13)

$$\Delta W = [(\tau_{xy} + d\tau_{xy})dx dz (\Delta du)] + [(\tau_{yx} + d\tau_{yx})dy dz (\Delta dv)] \quad (48)$$

Despreciando infinitésimos de orden superior el incremento de trabajo es

$$\Delta W = (\tau_{xy} dx dz) \Delta du + (\tau_{yx} dy dz) \Delta dv \quad (49)$$

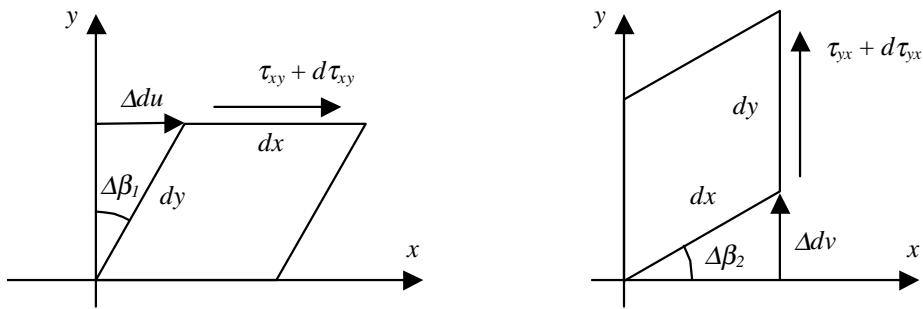


Figura 13. Trabajo incremental de las tensiones de corte.

Y notando que

$$du = \frac{\partial u}{\partial y} dy \quad (50)$$

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx$$

resulta

$$\Delta du = d\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) dy \quad (51)$$

$$\Delta dv = d\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) dx$$

Luego el incremento infinitesimal de trabajo es

$$\Delta W = \tau_{xy} d\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) dx dz dy + \tau_{yx} d\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) dy dz dx \quad (52)$$

Esto es

$$\Delta W = \tau_{xy} d\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) dx dy dz \quad (53)$$

O sea

$$\Delta W = \tau_{xy} d\gamma_{xy} dx dy dz \quad (54)$$

Luego un incremento diferencial dU_0 de la energía de deformación por unidad de volumen es

$$dU_0 = \tau_{xy} d\gamma_{xy} \quad (55)$$

por lo tanto la energía de deformación U_0 por unidad de volumen será

$$U_0 = \int_0^{\gamma_{xy}} \tau_{xy} d\gamma_{xy} \quad (56)$$

Y la energía de deformación total será la integral sobre todo el volumen de la energía de deformación específica U_0

$$U = \int_{\Omega} U_0 d\Omega = \int_{\Omega} \left(\int_0^{\gamma_{xy}} \tau_{xy} d\gamma_{xy} \right) d\Omega \quad (57)$$

Para el caso particular de un material lineal (esto es, que cumple la ley de Hooke) resulta

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \tau_{xy} \gamma_{xy} d\Omega \quad (58)$$

Finalmente si el material es elástico lineal la energía de deformación total producida por todas la tensiones es:

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy}) d\Omega \quad (59)$$

2.3 Ejemplo: Energía de deformación para vigas.

Consideremos una viga de eje recto y sección constante A , y adoptamos un sistema de coordenadas con el eje x coincidiendo con el eje centroidal de la viga y con los ejes y, z siendo ejes pricipales de inercia de la sección (ver fig. 14):

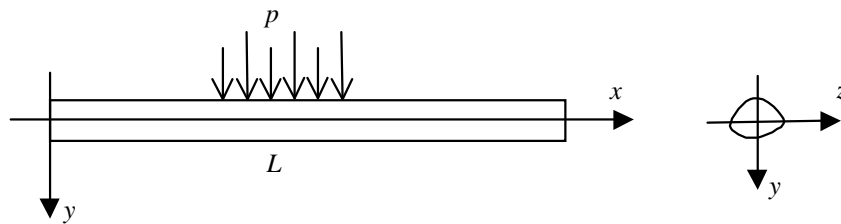


Figura 14. Viga de eje recto y sección constante.

Consideramos a la viga en un estado plano de tensiones, despreciando las tensiones verticales σ_y por ser mucho más pequeñas que las tensiones σ_x y τ_{xy} . Luego, asumiendo un comportamiento lineal para el material, la energía de deformación de la viga resulta

$$U = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_x \varepsilon_x + \tau_{xy} \gamma_{xy}) dV \quad (60)$$

Considerando deformaciones pequeñas y el mantenimiento de secciones planas, es posible despreciar las deformaciones de corte. Luego la energía de deformación queda:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \sigma_x \varepsilon_x dV \quad (61)$$

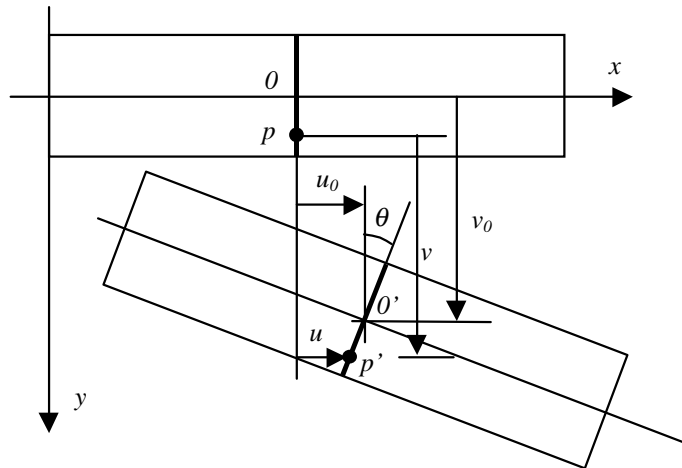


Figura 15. Desplazamiento del eje de la viga de eje recto.

Llamando u_0 , v_0 a los desplazamientos de un punto 0 del eje centroidal, entonces los desplazamientos u , v de un punto p contenida en la misma sección se pueden expresar como

$$\begin{aligned} u &= u_0 - y \operatorname{sen} \theta \\ v &= v_0 - y(1 - \cos \theta) \end{aligned} \quad (62)$$

Como por hipótesis las deformaciones son asumidas muy pequeñas, tenemos $\theta \ll 1$, esto implica que

$$\begin{aligned} \cos \theta &\approx 1 \\ \operatorname{sen} \theta &\approx \tan \theta = \frac{dv_0}{dx} \end{aligned} \quad (63)$$

Resultando

$$\begin{aligned} u &= u_0 - y \frac{dv_0}{dx} \\ v &= v_0 \end{aligned} \quad (64)$$

Para un material isotrópico lineal tenemos para un estado plano de tensiones

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x) \approx 0 \end{aligned} \quad (65)$$

Luego de la última ecuación resulta

$$\varepsilon_y = -\nu \varepsilon_x \quad (66)$$

por lo tanto

$$\sigma_x = E \varepsilon_x \quad (67)$$

La componente de deformación ε_x se puede expresar en función de los desplazamientos centroidales como

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} = \frac{du_0}{dx} - y \frac{d^2v_0}{dx^2} \quad (68)$$

Y la energía de deformación de la viga es

$$U = \frac{1}{2} \int_V \sigma_x \varepsilon_x dV = \frac{1}{2} \int_0^L E \int_A \left(\frac{du_0}{dx} - y \frac{d^2v_0}{dx^2} \right)^2 dA dx \quad (69)$$

esto es

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L E \left[\left(\frac{du_0}{dx} \right)^2 \int_A \left(\frac{du_0}{dx} - y \frac{d^2v_0}{dx^2} \right)^2 dA - 2 \frac{du_0}{dx} \frac{d^2v_0}{dx^2} \int_A y dA + \left(\frac{d^2v_0}{dx^2} \right)^2 \int_A y^2 dA \right] dx \quad (70)$$

Notando que el área viene dada por

$$\int_A dA = A \quad (71)$$

y siendo el eje y centroidal resulta

$$\int_A y dA = 0 \quad (72)$$

Además el momento de inercia I de la sección viene dado por

$$\int_A y^2 dA = I \quad (73)$$

Luego la energía de deformación para la viga queda

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L EA \left(\frac{du_0}{dx} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L EI \left(\frac{d^2v_0}{dx^2} \right)^2 dx \quad (74)$$

Donde la primera integral representa la energía de deformación por esfuerzo axial y la segunda integral es la energía de deformación por flexión.

Notemos que el esfuerzo normal N y el momento flector M se obtienen integrando las tensiones sobre la sección

$$N = \int_A \sigma_x dA = \int_A E \varepsilon_x dA = EA \frac{du_0}{dx} \quad (75)$$

$$M = \int_A \sigma_x y dA = \int_A E \varepsilon_x y dA = EI \frac{d^2v_0}{dx^2}$$

Por lo tanto, la energía de deformación también se puede escribir como

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{N^2}{EA} dx + \frac{1}{2} \int_0^L \frac{M^2}{EI} dx \quad (75)$$

3 PRINCIPIOS VARIACIONALES.

Los principios variacionales tienen un rol muy importante en el método de elementos finitos ya que permiten generalizar la formulación para cualquier problema gobernado por ecuaciones diferenciales a derivadas parciales.

3.1 Nociones de cálculo variacional.

El cálculo variacional se aplica sobre funcionales. Un funcional puede definirse como una función de funciones, así como una función $f(x,y)$ depende de las variables x, y , un funcional $F(u,v)$ depende de las funciones u, v . por ejemplo:

$$F(u, v) = \int_{\Omega} u^2 + v^2 dx dy \quad (76)$$

donde $u=u(x,y)$ y $v=v(x,y)$ son funciones de las variables independientes x,y .

En general el funcional F también puede ser función de las derivadas de las funciones u,v y también de x,y . Por ejemplo,

$$F = F(x, y, u, v, u_x, u_y, v_x, v_y) \quad (77)$$

es un funcional que depende de las variables *independientes* x,y y de las variables *dependientes* u, v, u_x, u_y, v_x y v_y , donde hemos usado la notación $u_x = \partial u / \partial x$, $u_y = \partial u / \partial y$, para las derivadas.

Así como el diferencial df de la función $f(x,y)$ viene dado por

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \quad (78)$$

también es posible definir en forma análoga una variación infinitesimal del funcional F , que indicamos como δF , donde el símbolo δ tiene el significado de variación. Así, para el funcional F de la ec. (24) la variación de F viene dada por:

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial u} \delta u + \frac{\partial F}{\partial v} \delta v + \frac{\partial F}{\partial u_x} \delta u_x + \frac{\partial F}{\partial v_x} \delta v_x + \frac{\partial F}{\partial u_y} \delta u_y + \frac{\partial F}{\partial v_y} \delta v_y \quad (79)$$

que es similar al concepto de diferencial de una variable, pero aplicado solamente a las variables dependientes.

Las variaciones δu , δv , δu_x , δu_y , δv_x , δv_y , son arbitrarias pero pueden estar sujetas a ciertas restricciones. Por ejemplo, en la figura 16 vemos la variación δu de una cierta función $u(x)$ en un intervalo $[a, b]$ donde se han impuesto las restricciones que las variaciones sean nulas en los extremos del intervalo, esto es $\delta u(a)=0$, $\delta u(b)=0$.

Se puede verificar que las leyes de variación de las sumas, productos, potencias, etc., son completamente análogas a las leyes de la diferenciación. Por ejemplo, si $F_1 = F_1(u)$ y $F_2 = F_2(u)$ entonces se cumple que:

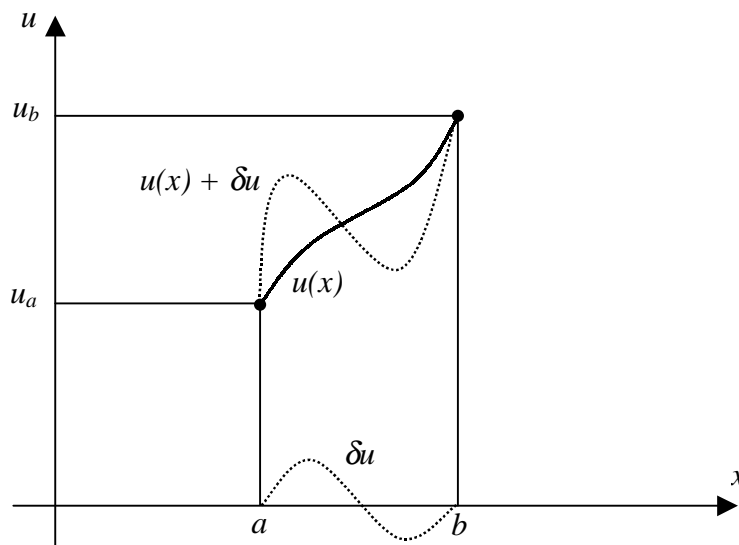


Figura 16. Variación de $u(x)$ sujeta a restricciones en los extremos.

$$\delta(F_1 F_2) = F_1 \delta F_2 + F_2 \delta F_1 \quad (80)$$

$$\delta\left(\frac{F_1}{F_2}\right) = \frac{F_2 \delta F_1 - F_1 \delta F_2}{F_2^2}$$

Además, el operador variacional tiene la propiedad:

$$\frac{d(\delta u)}{dx} = \delta\left(\frac{du}{dx}\right) \quad (81)$$

esto es, la derivada de la variación es igual a la variación de la derivada.

3.2 Principios variacionales asociados a ecuaciones diferenciales.

Un sistema de ecuaciones diferenciales tiene un principio variacional asociado si existe un funcional tal que la anulación de su primera variación genera las ecuaciones diferenciales del sistema. Por ejemplo, considere el siguiente funcional definido sobre una región Ω del plano:

$$\Pi(u, v) = \int_{\Omega} F(x, y, u, v, u_x, u_y, v_x, v_y) dx dy \quad (82)$$

Se desea encontrar un par de funciones u, v tales que hagan estacionario a este funcional, esto es:

$$\delta\Pi(u, v) = 0 \quad (83)$$

Por el momento se supondrá que u, v son arbitrarias sobre la frontera Γ de Ω . luego aplicando la condición de funcional estacionario, resulta:

$$\delta\Pi = \int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial F}{\partial u} \delta u + \frac{\partial F}{\partial v} \delta v + \frac{\partial F}{\partial u_x} \delta u_x + \frac{\partial F}{\partial v_x} \delta v_x + \frac{\partial F}{\partial u_y} \delta u_y + \frac{\partial F}{\partial v_y} \delta v_y \right\} dx dy = 0 \quad (84)$$

Considere la integración por partes, por ejemplo, del tercer término de esta expresión, aplicando el teorema de Green:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial F}{\partial u_{,x}} \delta u_{,x} dx dy &= \int_{\Omega} \frac{\partial F}{\partial u_{,x}} \frac{\partial \delta u}{\partial x} dx dy \\ &= \int_{\Gamma} \frac{\partial F}{\partial u_{,x}} \delta u n_x ds - \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial u_{,x}} \right) \delta u dx dy \end{aligned} \quad (85)$$

donde n_x es la proyección de la normal en la dirección x .

Con un procedimiento similar en los otros términos es posible eliminar todas las variaciones de las derivadas quedando únicamente variaciones de función, resultando

$$\begin{aligned} \delta \Pi &= \int_{\Omega} \left\{ \left[\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial u_{,x}} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial u_{,y}} \right) \right] \delta u \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial v_{,x}} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial v_{,y}} \right) \right] \delta v \right\} dx dy \\ &\quad + \int_{\Gamma} \left\{ \left[\frac{\partial F}{\partial u_{,x}} n_x + \frac{\partial F}{\partial u_{,y}} n_y \right] \delta u + \left[\frac{\partial F}{\partial v_{,x}} n_x + \frac{\partial F}{\partial v_{,y}} n_y \right] \delta v \right\} ds = 0 \end{aligned} \quad (86)$$

Como esta expresión debe ser válida para variaciones arbitrarias δu , δv , luego sobre el dominio Ω deben ser nulos los términos entre corchetes, esto es:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial u_{,x}} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial u_{,y}} \right) &= 0 \\ \frac{\partial F}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial v_{,x}} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial v_{,y}} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (87)$$

Estas ecuaciones diferenciales obtenidas de la condición de hacer estacionario un funcional se llaman *ecuaciones de Euler*. Además sobre el contorno Γ deben anularse los términos entre corchetes de las integrales de contorno:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial u_{,x}} n_x + \frac{\partial F}{\partial u_{,y}} n_y &= 0 \\ \frac{\partial F}{\partial v_{,x}} n_x + \frac{\partial F}{\partial v_{,y}} n_y &= 0 \end{aligned} \quad (88)$$

Estas condiciones de contorno se llaman *condiciones de contorno naturales* y deben cumplirse en todo punto del contorno donde las variables u , v pueden variar libremente. Si sobre alguna parte del contorno las variables u , v tienen valores impuestos estas condiciones de contorno son llamadas *condiciones de contorno esenciales*, y las variaciones no deben alterar estos valores. En general, si las ecuaciones diferenciales (87) tienen derivadas hasta de orden $2m$, siendo m el orden de la máxima derivada en F , entonces las condiciones de contorno que contienen derivadas hasta orden $m-1$ son llamadas *condiciones de contorno*

esenciales y las que contienen derivadas de orden m hasta $2m-1$ son llamadas *condiciones de contorno naturales*.

Existen funcionales para problemas de conducción de calor, para ciertos tipos de flujos de fluido y para una gran variedad de problemas de ingeniería. En general estos funcionales se derivan de principios físicos. En mecánica estructural los funcionales más utilizados son los obtenidos a partir de la aplicación del principio de mínima energía potencial ó del principio de los trabajos virtuales.

3.3 Principio de mínima energía potencial.

Considere una fuerza \mathbf{F} actuando sobre una partícula, con vector posición \mathbf{r} , que se traslada sobre una trayectoria curva entre dos punto a, b .

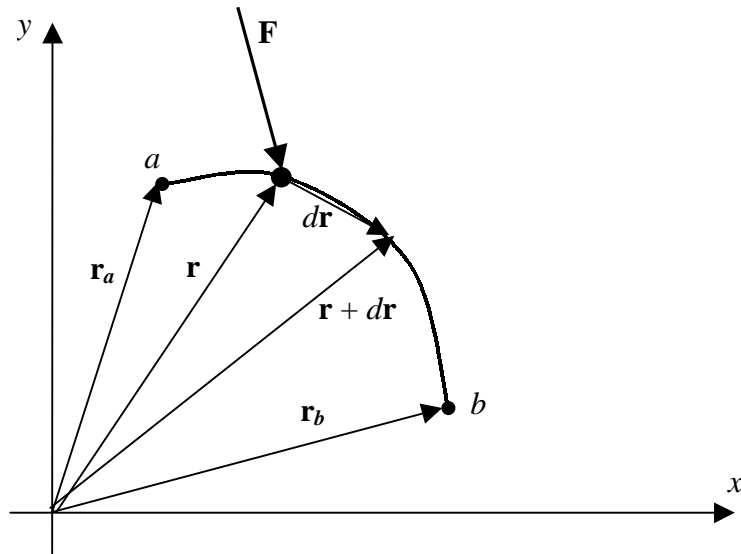


Figura 17. Desplazamiento de la fuerza \mathbf{F} sobre una trayectoria curva.

La segunda ley de Newton para una partícula establece que

$$\mathbf{F} = m \ddot{\mathbf{r}} \quad (89)$$

esto es, la fuerza resultante actuando sobre la partícula debe ser igual al producto de la masa de la partícula por su aceleración. Donde hemos indicado con puntos a las derivadas respecto del tiempo

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} \\ \ddot{\mathbf{r}} &= \frac{d\dot{\mathbf{r}}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \end{aligned} \quad (90)$$

Para un desplazamiento diferencial $d\mathbf{r}$ de la partícula la fuerza \mathbf{F} realiza un trabajo incremental ΔW que se puede expresar como:

$$\begin{aligned} \Delta W &= \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = m \ddot{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r} = m \left(\frac{d\dot{\mathbf{r}}}{dt} \right) \cdot d\mathbf{r} = m d\dot{\mathbf{r}} \cdot \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) \\ &= m d\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} = d\left(\frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} \right) = dT \end{aligned} \quad (91)$$

donde el lado derecho es el diferencial de la *energía cinética* T .

Dividiendo las fuerzas que actúan sobre la partícula en conservativas y no conservativas tenemos

$$\Delta W = \Delta W_{nc} - dV = dT \quad (92)$$

donde V es la energía potencial de las fuerzas conservativas y ΔW_{nc} es el incremento de trabajo de las fuerzas no conservativas. Reagrupando términos tenemos

$$\Delta W_{nc} = d(T + V) = dE \quad (93)$$

donde $E = T + V$ es la denominada *energía mecánica* y la ecuación anterior expresa que la variación de energía mecánica de la partícula es igual al incremento de trabajo de las fuerzas no conservativas.

Ahora bien, si sobre la partícula solo actúan fuerzas conservativas y además se encuentra en equilibrio estático ($T = 0$), tenemos que

$$dV = 0 \quad (94)$$

Si consideramos un cuerpo formado por infinitas partículas, donde los desplazamientos de cada partícula del cuerpo vienen dados por funciones u, v entonces debe cumplirse que

$$\delta V = 0 \quad (95)$$

esto es, la variación de la energía potencial debe ser nula. Notando que esta es la condición para que la función V tenga un extremo (se puede demostrar que si el equilibrio es estable V debe ser mínimo en la configuración de equilibrio), luego al cumplimiento de la expresión anterior se lo denomina *Principio de mínima energía potencial*.

Para el caso de un cuerpo elástico la energía potencial total V se puede descomponer en dos partes: a) energía potencial U de deformación elástica, asociada al trabajo de las tensiones internas y b) energía potencial V_c asociada al trabajo de las fuerzas externas conservativas aplicadas al cuerpo. Luego la energía potencial total es

$$V = U + V_c \quad (96)$$

y al aplicando el principio de mínima energía potencial resulta

$$\delta V = \delta U + \delta V_c = 0 \quad (97)$$

La energía potencial de deformación U viene dada por la integral

$$U = \int_{\Omega} U_0 d\Omega \quad (98)$$

donde U_0 es la función *densidad de energía de deformación* que para deformaciones pequeñas elásticas se puede expresar como:

$$U_0 = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (99)$$

esto es, como una función de las deformaciones $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$

$$U_0 = U_0(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}) \quad (100)$$

Luego su variación es

$$\delta U_0 = \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_x} \delta \varepsilon_x + \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_y} \delta \varepsilon_y + \frac{\partial U_0}{\partial \gamma_{xy}} \delta \gamma_{xy} \quad (101)$$

La variación del potencial de fuerzas externas conservativas V_e dependerá de la naturaleza de estas fuerzas. Por ejemplo, si las fuerzas externas que actúan sobre un cuerpo, tanto de superficie como de volumen, son de magnitud constante y no varían de dirección durante su aplicación, es sencillo probar que son conservativas y su potencial vale

$$V_e = - \int_{\Omega} b_x u + b_y v d\Omega - \int_{\Gamma} t_x u + t_y v d\Gamma \quad (102)$$

3.4 Principio de los trabajos virtuales.

Consideremos un cuerpo deformable en equilibrio estático bajo la acción de fuerzas externas de superficie y volumen. Debido a estas fuerzas el cuerpo se deforma con desplazamientos u, v generándose en su interior fuerzas internas que equilibran a las fuerzas externas.

Si superponemos a los desplazamientos en equilibrio un campo de desplazamientos arbitrarios $\delta u, \delta v$ compatible con las condiciones de vínculo y de magnitud infinitesimal, tales desplazamientos son llamados *desplazamientos virtuales*.

Si evaluamos el incremento de trabajo hecho por las fuerzas externas durante la aplicación de los desplazamientos virtuales tenemos el *trabajo virtual externo (TVE)* que vale

$$TVE = \int_{\Omega} b_x \delta u + b_y \delta v d\Omega + \int_{\Gamma} t_x \delta u + t_y \delta v d\Gamma \quad (103)$$

Usando las ecuaciones de equilibrio en el contorno la integral de superficie se puede escribir como

$$\int_{\Gamma} t_x \delta u + t_y \delta v d\Gamma = \int_{\Gamma} (\sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y) \delta u + (\sigma_y n_y + \tau_{xy} n_x) \delta v d\Gamma \quad (104)$$

Aplicando el teorema de la divergencia a la última integral de superficie resulta

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} t_x \delta u + t_y \delta v d\Gamma &= \int_{\Omega} \left(\sigma_x \frac{\partial \delta u}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial \delta v}{\partial y} + \tau_{xy} \left(\frac{\partial \delta u}{\partial y} + \frac{\partial \delta v}{\partial x} \right) \right) d\Omega + \\ &\int_{\Omega} \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \delta u + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \delta v + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \delta u + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \delta v \right) d\Omega \end{aligned} \quad (105)$$

Notando que la derivada de una variación es igual a la variación de la derivada y agrupando términos en la última integral, tenemos

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} t_x \delta u + t_y \delta v d\Gamma &= \int_{\Omega} \left(\sigma_x \delta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \sigma_y \delta \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) + \tau_{xy} \delta \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) d\Omega + \\ &\int_{\Omega} \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) \delta u + \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \right) \delta v d\Omega \end{aligned} \quad (106)$$

Dado que las tensiones están en equilibrio y usando la definición de deformaciones resulta

$$\int_{\Gamma} t_x \delta u + t_y \delta v d\Gamma = \int_{\Omega} (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy}) d\Omega + \int_{\Omega} (-b_x) \delta u + (-b_y) \delta v d\Omega \quad (107)$$

Pasando la última integral a la izquierda tenemos

$$\begin{aligned} TVE &= \int_{\Omega} b_x \delta u + b_y \delta v d\Omega + \int_{\Gamma} t_x \delta u + t_y \delta v d\Gamma \\ &= \int_{\Omega} (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy}) d\Omega = TVI \end{aligned} \quad (108)$$

donde la integral de la derecha representa el incremento de trabajo realizado por las fuerzas internas ante la aplicación del campo virtual de desplazamientos y se denomina *trabajo virtual interno*. Luego al cumplimiento de la expresión anterior se lo denomina *Principio de los trabajos virtuales*, y debe ser válido para cualquier campo de desplazamientos compatible con las condiciones de vínculo.

Este principio es muy general y se aplica tanto para fuerzas conservativas como no conservativas. Si las fuerzas internas son conservativas el trabajo virtual interno viene dado por la variación de la energía de deformación, pues la variación se puede tomar como un desplazamiento virtual, esto es

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_{\Omega} \delta U_0 d\Omega = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_x} \delta \varepsilon_x + \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_y} \delta \varepsilon_y + \frac{\partial U_0}{\partial \gamma_{xy}} \delta \gamma_{xy} \right) d\Omega = \\ &= \int_{\Omega} (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy}) d\Omega \end{aligned} \quad (109)$$

Comparando resultan

$$\sigma_x = \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_x}, \quad \sigma_y = \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_y}, \quad \tau_{xy} = \frac{\partial U_0}{\partial \gamma_{xy}} \quad (110)$$

Siendo válidas estas expresiones para cualquier cuerpo elástico, aún cuando la energía de deformación U_0 sea no lineal.

3.5 Ejemplo de Aplicación: Vigas de eje recto.

Consideremos una viga de eje recto de sección constante, empotrada en un extremo y libre en el otro, sometida a un cargamento distribuido p arbitrario.

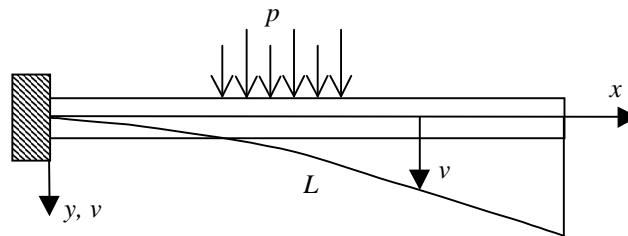


Figura 18. Viga de eje recto y sección constante.

Deseamos hallar la ecuación diferencial y las condiciones de contorno de este problema. Para ello usaremos el principio de mínima energía potencial.

La energía de deformación para la viga, despreciando las deformaciones por corte, es

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 dx \quad (111)$$

Siendo v el desplazamiento del eje centroidal de la viga.

El trabajo de las fuerzas externas, asumidas de módulo y dirección constante, es

$$V_e = - \int_0^L p v dx \quad (112)$$

Luego la energía potencial total es

$$V = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 dx - \int_0^L p v dx \quad (113)$$

Por el principio de mínima energía potencial debemos tener

$$\delta V = 0 \quad (114)$$

esto es

$$\delta V = \int_0^L EI \frac{d^2 v}{dx^2} \delta \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right) dx - \int_0^L p \delta v dx = 0 \quad (115)$$

Notando que la variación de la derivada es la derivada de la variación tenemos

$$\delta V = \int_0^L EI \frac{d^2 v}{dx^2} \left(\frac{d^2 \delta v}{dx^2} \right) dx - \int_0^L p \delta v dx = 0 \quad (116)$$

Integrando por partes la primera integral resulta

$$\delta V = \left| EI \frac{d^2 v}{dx^2} \delta \left(\frac{dv}{dx} \right) \right|_0^L - \int_0^L EI \frac{d^3 v}{dx^3} \left(\frac{d \delta v}{dx} \right) dx - \int_0^L p \delta v dx = 0 \quad (117)$$

Volviendo a integrar por partes tenemos

$$\delta V = \left| EI \frac{d^2 v}{dx^2} \delta \left(\frac{dv}{dx} \right) \right|_0^L - \left| EI \frac{d^3 v}{dx^3} \delta v \right|_0^L + \int_0^L EI \frac{d^4 v}{dx^4} \delta v dx - \int_0^L p \delta v dx = 0 \quad (118)$$

Agrupando términos tenemos

$$\delta V = \int_0^L \left(EI \frac{d^4 v}{dx^4} - p \right) \delta v dx + \left| EI \frac{d^2 v}{dx^2} \delta \left(\frac{dv}{dx} \right) \right|_0^L - \left| EI \frac{d^3 v}{dx^3} \delta v \right|_0^L = 0 \quad (119)$$

Esta expresión debe ser válida para variaciones arbitrarias δv que no alteren las condiciones esenciales de contorno, luego debe cumplirse la siguiente ecuación diferencial:

$$EI \frac{d^4 v}{dx^4} - p = 0 \quad (120)$$

junto con las siguientes condiciones de contorno:

$$EI \frac{d^2 v}{dx^2} \delta \left(\frac{dv}{dx} \right) \Big|_L = 0 \quad EI \frac{d^3 v}{dx^3} \delta v \Big|_L = 0 \quad (121 \text{ a,b})$$

$$EI \frac{d^2 v}{dx^2} \delta \left(\frac{dv}{dx} \right) \Big|_0 = 0 \quad EI \frac{d^3 v}{dx^3} \delta v \Big|_0 = 0 \quad (121 \text{ c,d})$$

Notemos que las variaciones deben respetar las condiciones esenciales de contorno, esto es, aquellas impuestas sobre la función ó su derivada. En el extremo empotrado ($x = 0$) el desplazamiento v y el giro deben ser nulos, luego

$$v(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta v \Big|_0 = 0 \quad (122 \text{ a})$$

$$\left(\frac{dv}{dx} \right) \Big|_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta \left(\frac{dv}{dx} \right) \Big|_0 = 0 \quad (122 \text{ b})$$

Por lo tanto las condiciones de contorno esenciales se satisfacen automáticamente en ($x = 0$) ya que en ese extremo las variaciones deben ser nulas. En el extremo libre ($x = L$) se deben cumplir las condiciones de contorno (121 a,b). Como las variaciones de desplazamiento y giro son arbitrarias en ese extremo entonces debe cumplirse que

$$EI \frac{d^2 v}{dx^2} \Big|_L = 0 \quad EI \frac{d^3 v}{dx^3} \Big|_L = 0 \quad (123 \text{ a,b})$$

Notando que el momento flector M y el esfuerzo de corte Q en una sección vienen definidos como

$$M = -EI \frac{d^2 v}{dx^2} \quad (124)$$

$$Q = EI \frac{d^3 v}{dx^3}$$

Entonces las condiciones de contorno anteriores se pueden expresar como

$$M(L) = 0 \quad Q(L) = 0 \quad (125 \text{ a,b})$$

Luego, la aplicación del principio de mínima energía potencial nos ha permitido obtener la ecuación diferencial, ec.(120), y sus condiciones de contorno, ecs.(121).

REFERENCIAS.

- [1] S. Timoshenko y J.N. Goodier, *Theory of Elasticity*, 2^{da} ed., McGraw-Hill, 1951.
- [2] F.B. Hildebrand, *Métodos de la Matemática Aplicada*, Eudeba Manuales, 1973.
- [3] Y.C. Fung, *Foundations of Solid Mechanics*, Prentice-Hall, 1968.